E.N.S.I. de PHYSIQUE option M session 1987

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Étant donné un segment I de $\mathbb{R}$ et un entier naturel k, on note $C^k(I)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques de classe C^k sur I. Pour tout élément f de $C^0(I)$ on pose : $N_\infty(f) = \sup_{t \in I} |f(t)|$.

Dans tout le problème on désigne par ρ une fonction à valeurs réelles de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et par σ la fonction $x \longmapsto \rho(x)\,x$. On suppose qu'il existe deux nombres réels α et β strictement positifs tels que, pour tout nombre réel x, $\alpha \leqslant \sigma'(x) \leqslant \beta$.

Dans la partie I, on étudie l'existence et l'unicité d'une fonction f de classe C^2 sur $[0, 1]$ satisfaisant au problème aux limites :

$$(1) \qquad \begin{cases} [\rho(f')\,f']' = \varphi \\ f(0) = f(1) = 0, \end{cases}$$

où φ est un élément donné de $C^0([0, 1])$.

Dans les parties II et III on étudie une méthode d'approximation de la solution f par des fonctions affines par morceaux sur $[0, 1]$ associées à une subdivision de $[0, 1]$.

Dans la partie IV, on étudie la qualité de l'approximation.

I. ÉTUDE DU PROBLÈME AUX LIMITES (1).

1° *Propriétés des fonctions σ et ρ.*

a. Montrer que σ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur lui-même.

b. Soit τ la bijection réciproque de σ. Prouver que τ est de classe C^1 et que, pour tout élément x de $\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{\beta} \leqslant \tau'(x) \leqslant \dfrac{1}{\alpha}$.

c. Montrer que, pour tout nombre réel x, $\alpha \leqslant \rho(x) \leqslant \beta$.

2° *Étude d'un problème de Cauchy.*

Soient ψ la fonction définie sur $[0, 1]$ par $\psi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt$ et λ un nombre réel.

Montrer que le problème de Cauchy :

$$(2) \qquad \begin{cases} [\rho(h')\,h']' = \varphi \\ h(0) = 0 \quad \text{et} \quad h'(0) = \lambda \end{cases}$$

admet une solution et une seule sur $[0, 1]$ à savoir la fonction h_λ définie par

$$(3) \qquad h_\lambda(x) = \int_0^x \tau[\psi(t) + \sigma(\lambda)]\,dt.$$

À cet effet, on vérifiera, par deux intégrations successives convenables, que toute solution h de (2) est nécessairement donnée par (3); on prouvera qu'inversement, h_λ est solution de (2).

3° *Existence et unicité de la solution du problème aux limites* (1).

a. Soit χ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\chi(\lambda) = h_\lambda(1)$.

Montrer que χ est de classe C^1 et que :

$$\frac{1}{\beta} \leqslant \chi'(\lambda) \leqslant \frac{\beta}{\alpha}.$$

En déduire que χ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur lui-même.

Tournez la page S. V. P.

b. Soit γ l'unique nombre réel tel que $\chi(\gamma) = 0$.

Montrer que la fonction $f = h_\gamma$ est l'unique solution de (1) sur $[0, 1]$.

1° *Estimation en fonction de la donnée* φ.

a. Soit g un élément de $C^2([0, 1])$ tel que $g(0) = g(1) = 0$. Prouver que, pour tout élément x de $[0, 1]$,

$$|g(x)| \leqslant \frac{x(1-x)}{2} N_\infty(g'').$$

(On écartera les cas immédiats $x = 0$ et $x = 1$; on pourra introduire la fonction auxiliaire $G : t \longmapsto g(t) - k\frac{t(1-t)}{2}$, où k est choisi tel que $G(x) = 0$, et on prouvera qu'il existe un élément c de $[0, 1]$ tel que $G''(c) = 0$.)

b. En déduire que, pour tout élément x de $[0, 1]$,

$$|f(x)| \leqslant \frac{x(1-x)}{2\alpha} N_\infty(\varphi).$$

II. Discrétisation du problème aux limites (1).

On suppose donné un entier $n > 1$, on pose $\delta = \frac{1}{n+1}$ et on considère la subdivision S_n de $[0, 1]$ à pas constant δ, constituée des points $(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ où pour tout $j \in [0, n+1]$, $x_j = j\delta$.

On note F le sous-espace vectoriel de $C^0([0, 1])$ constitué des fonctions f telles que $f(0) = f(1) = 0$ et dont la restriction à tout segment $[x_j, x_{j+1}]$ où $0 \leqslant j \leqslant n$, est de classe C^1.

1° Montrer que l'application

5) $$(f, g) \longmapsto (f \mid g) = \sum_{j=0}^{n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(t)\, g'(t)\, dt$$

est un produit scalaire sur F. On note $f \longmapsto \| f \|$ la norme associée.

2° Pour tout couple (f, g) d'éléments de F, on pose :

6) $$A(f, g) = \sum_{j=0}^{n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \rho[f'(t)]\, f'(t)\, g'(t)\, dt.$$

On notera que l'application $g \longmapsto A(f, g)$ est linéaire, et que, pour tout élément g de F, $A(0, g) = 0$.

a. Montrer que, pour tout triplet (f_1, f_2, g) d'éléments de F,

(7) $$|A(f_1, g) - A(f_2, g)| \leqslant \beta \| f_1 - f_2 \| \cdot \| g \|.$$

b. Montrer que pour tout couple (x, y) d'éléments de $[0, 1]$,

$$[\rho(x)\, x - \rho(y)\, y](x - y) \geqslant \alpha(x - y)^2.$$

En déduire que, pour tout couple (f_1, f_2) d'éléments de F,

(8) $$\alpha \| f_1 - f_2 \|^2 \leqslant A(f_1, f_1 - f_2) - A(f_2, f_1 - f_2).$$

3° *a.* Montrer que si f est une solution du problème aux limites (1), alors pour tout élément g de F,

(9) $$A(f, g) = B(g),$$

où $B(g) = -\int_0^1 \varphi(t)\, g(t)\, dt$.

b. En utilisant (8), prouver que f est l'unique élément de F solution de (9).

Retrouver ainsi l'unicité de la solution du problème aux limites (1).

Tournez la page S. V. P.

— 3 —

Dans la suite du problème, on étudie les solutions de (9), en remplaçant F par le sous-espace vectoriel V_n de F constitué des fonctions u dont la restriction à chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}]$ est affine.

On se propose de prouver qu'il existe un élément u_n et un seul de V_n tel que, pour tout élément v de V_n, $A(u_n, v) = B(v)$, ce qui fait l'objet de la partie III, et de montrer que u_n fournit une approximation de la solution f du problème aux limites (1), ce qui fait l'objet de la partie IV.

III. Résolution du problème discret.

Dans cette partie on considère un R-espace vectoriel V de dimension $n \geqslant 1$ muni d'un produit scalaire noté $(u, v) \longmapsto (u \mid v)$, et de la norme associée $u \longmapsto \| u \|$.

On suppose données une forme linéaire $v \longmapsto B(v)$ sur V et une application $(u, v) \longmapsto A(u, v)$ de $V \times V$ dans R telle que $v \longmapsto A(u, v)$ soit linéaire, telle que, pour tout élément v de V, $A(0, v) = 0$ et satisfaisant aux conditions (7) et (8), où F est remplacé par V, f_1, f_2 et g par u_1, u_2 et v.

On note b l'unique élément de V tel que, pour tout élément v de V, $(b \mid v) = B(v)$; de même pour tout élément u de V, on note $a(u)$ l'unique élément de V tel que, pour tout élément v de V, $(a(u) \mid v) = A(u, v)$. Ainsi, a est une application (non nécessairement linéaire) de V dans V.

1° *Propriétés de l'application* a.

a. Montrer que $a(0) = 0$ et que a est lipschitzienne dans le rapport β, c'est-à-dire que, pour tout couple (u_1, u_2) d'éléments de V,

$$\| a(u_1) - a(u_2) \| \leqslant \beta \| u_1 - u_2 \| .$$

b. Montrer que, pour tout couple $(u_1\ u_2)$ d'éléments de V,

$$\alpha \| u_1 - u_2 \|^2 \leqslant (a(u_1) - a(u_2) \mid u_1 - u_2) .$$

c. En déduire que, pour tout élément v de V,

$$\alpha \| v \|^2 \leqslant A(v, v) .$$

2° *Existence et unicité de la solution de l'équation* $a(u) = b$.

Soit λ un nombre réel strictement positif. On considère l'application F de V dans V définie par $F(u) = u - \lambda(a(u) - b)$.

a. Montrer que :

$$\| F(u_1) - F(u_2) \|^2 \leqslant (1 - 2\lambda\alpha + \lambda^2\beta^2) \| u_1 - u_2 \|^2 .$$

b. En déduire que si $0 < \lambda < \dfrac{2\alpha}{\beta^2}$, F est contractante.

c. Prouver finalement que l'équation $a(u) = b$ admet une solution et une seule.

3° *Application au problème aux limites discrétisé.*

a. Pour tout élément j de $\{1, \ldots, n\}$, soit w_j l'élément de V_n tel que $w_j(x_j) = 1$ et $w_j(x_k) = 0$ si $k \neq j$.

Montrer que $(w_1, \ldots, w_n)$ est une base de V_n et déterminer les composantes d'un élément v de V_n dans cette base.

b. Prouver qu'il existe un élément u_n et un seul de V_n tel que, pour tout élément v de V_n,

(10) $$A(u_n, v) = B(v) ,$$

où A et B ont été définies dans la partie II.

Tournez la page S. V. P.

4° *Étude d'un cas plus général.*

Dans cette question, on suppose encore que A satisfait à la condition (7), mais que (8) est remplacée par les conditions plus faibles (8') et (8") :

(8') Pour tout couple (u_1, u_2) d'éléments distincts de V,

$$0 < A(u_1, u_1 - u_2) - A(u_2, u_1 - u_2).$$

(8") $$\frac{A(v, v)}{\|v\|} \longrightarrow +\infty \text{ lorsque } \|v\| \longrightarrow +\infty.$$

a. Prouver l'unicité de la solution de $a(u) = b$.

b. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe un élément w_k et un seul de V tel que :

$$a(w_k) + \frac{1}{k} w_k = b.$$

On pourra introduire :

$$A_k(u, v) = A(u, v) + \frac{1}{k}(u \mid v).$$

c. Montrer que la suite (w_k) est bornée.

d. Prouver que la suite (w_k) converge vers un élément u de V solution de $a(u) = b$, (on pourra utiliser des suites extraites de la suite (w_k)).

IV. Qualité de l'approximation de f par u_n.

Dans cette partie, f désigne l'unique solution du problème aux limites (1) et, pour tout n, u_n l'unique solution dans V_n de l'équation (10).

1° Soit v un élément quelconque de V_n.

a. Montrer que :

$$\alpha \| f - u_n \|^2 \leqslant A(f, f - v) - A(u_n, f - v).$$

b. En déduire que :

$$\| f - u_n \| \leqslant \frac{\beta}{\alpha} \| f - v \|.$$

2° Soit g un élément de $C^2([0, 1])$ tel que $g(0) = g(1) = 0$. On note v_g l'unique élément de V_n tel que, pour tout $j \in [0, n + 1]$, $v_g(x_j) = g(x_j)$.

a. Prouver que, pour tout élément x de $[x_j, x_{j+1}]$,

$$| g'(x) - v_g'(x) | \leqslant \frac{1}{n + 1} N_\infty(g'').$$

b. En déduire que :

$$\| g - v_g \| \leqslant \frac{1}{n + 1} N_\infty(g'').$$

3° *a.* Déterminer un nombre réel strictement positif K tel que, pour tout entier $n \geqslant 1$, et pour tout élément φ de $C^0([0, 1])$,

(11) $$\| f - u_n \| \leqslant \frac{K}{n + 1} N_\infty(\varphi).$$

b. En déduire que (u_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

• • •
•